

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

Aufgabe 4

Ermittle die Koordinatengleichung der Ebene E , die durch die sich schneidenden Geraden g und h geht:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 18,5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,25 \\ 15,75 \\ 4,5 \end{pmatrix}, h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Lösungsweg

Ansatz: Wir ermitteln zwei Punkte der Geraden g und einen Punkt der Geraden h .

$$t = 0 \text{ in } g \Rightarrow A(7,5|18,5|8)$$

$$t = 1 \text{ in } g \Rightarrow B(9,75|34,25|12,5)$$

$$s = 1 \text{ in } h \Rightarrow C(5|1|3)$$

$$E : \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 18,5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,25 \\ 15,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ -17,5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 7,5 + 2,25t - 2,5s$$

$$x_2 = 18,5 + 15,75t - 17,5s$$

I

II

$$x_3 = 8 + 4,5t - 5s$$

III

$$I \cdot (-7) + II \Rightarrow -7x_1 + x_2 = -34$$

Antwort: $E : 7x_1 - x_2 = 34$.

2. Lösungsweg

Ansatz: Stützvektor von E sei der Stützvektor von h , die Spannvektoren von E seien die Richtungsvektoren der zwei Geraden.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,25 \\ 15,75 \\ 4,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 3 + 2,25t + 2s \quad I$$

$$x_2 = 1 + 15,75t \quad II$$

$$x_3 = 2 + 4,5t + s \quad III$$

$$III \cdot (-2) + I \Rightarrow x_1 - 2x_3 = -1 - 6,75t \quad IV$$

$$IV \cdot (7) + II \cdot (3) \Rightarrow 7x_1 + 3x_2 - 14x_3 = -4$$

Antwort: $E : 7x_1 + 3x_2 - 14x_3 = -4$.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?