

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 3x^2, & x \leq 0 \\ 3x^2 + 4x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 4x + 2, & x \leq 1 \\ 2x + 4, & x > 1 \end{cases}.$$

Berechne: a) $\int_{-1}^1 f(x)dx$ b) $\int_0^2 g(x)dx$.

1. Lösungsweg

a) Eine Stammfunktion von f ist $F(x) = \begin{cases} x^4 + x^3, & x \leq 0 \\ x^3 + 2x^2, & x > 0 \end{cases}$

Somit ist $\int_{-1}^1 f(x)dx = F(1) - F(-1) = 3 - 0 = 3$.

b) Eine Stammfunktion von g ist $G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ x^2 + 4x, & x > 1 \end{cases}$

$$\text{Somit ist } \int_0^2 g(x)dx = G(2) - G(0) = 12 - 0 = 12.$$

2. Lösungsweg

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= [x^4 + x^3]_{-1}^0 + [x^3 + 2x^2]_0^1 = 0 + 3 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^2 g(x)dx &= \int_0^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx \\ &= [2x^2 + 2x]_0^1 + [x^2 + 4x]_1^2 = 4 + 7 = 11. \end{aligned}$$

Bei Punkt b) haben die zwei Lösungswege zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt. Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?